2027 届高三年级数学校本练习（5）

命题人：丁振华　　审题人：祁全祥

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，请把答案填写在答题卡相应位置上。

1. 已知集合 $A=\{y \mid y=\log_{\frac{1}{2}}x,\ x>\frac{1}{2}\}$，$B=\{y \mid y=2^x,\ x\le 0\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{y \mid y<1\}$　　B. $\{y \mid 0<y<1\}$　　C. $\{y \mid 0<y\le 1\}$　　D. $\{y \mid y>1\}$

2. 若命题“$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-2ax+6a>0$”是假命题，则 a 的取值范围是

A. $(0,6)$　　B. $(-\infty,0)\cup(6,+\infty)$　　C. $[0,6]$　　D. $(-\infty,0]\cup[6,+\infty)$

3. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，$A=60°$，$bc=6\sin B\cos C$，$\cos B\sin C=\frac{\sqrt{3}}{6}$，则 $\triangle ABC$ 的面积为

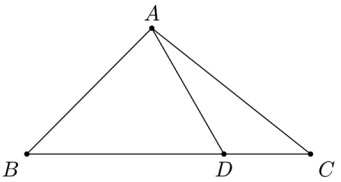
A. 1　　B. $\frac{3}{2}$　　C. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$　　D. $3\sqrt{3}$

4. 曲线 $y=e^x+x+1$ 上的点到直线 $y=2x$ 距离的最小值为

A. $\frac{\sqrt{5}}{10}$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　D. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

5. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle CBA=45°$，D 是 BC 边上的一点，$AD=5$，$AC=7$，$DC=3$，则 $AB=$

A. $4\sqrt{3}$　　B. $5\sqrt{2}$　　C. $2\sqrt{10}$　　D. $\frac{5\sqrt{6}}{2}$



6. 已知函数 $f(x)=\ln x+x-\frac{1}{x}$，若 $f(a)+f(b)=0$，则 a^2+b^2 的最小值为

A. 1　　B. 2　　C. $\sqrt{2}$　　D. $2\sqrt{2}$

7. 已知平面向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=1$，$\langle\vec{b},\vec{a}+\vec{b}\rangle=\frac{\pi}{6}$，则 $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$ 的最大值为

A. 2　　B. $\sqrt{2}+1$　　C. $\sqrt{3}+1$　　D. 3

8. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,\ |\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 图象与直线 $y=\frac{1}{2}$ 的两个交点间的最小距离为 $\frac{\pi}{6}$，且 $f\left(\frac{2\pi}{3}+x\right)+f(-x)=0$。若 $f(x_1)=-f(x_2)$，且 $f(x)$ 在区间 $[x_1,x_2]$ 上单调，则 $|x_1+x_2|$ 的最小值为

A. $\frac{\pi}{12}$　　B. $\frac{\pi}{6}$　　C. $\frac{\pi}{4}$　　D. $\frac{\pi}{3}$

二、多项选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求的，请把答案填写在答题卡相应位置上。

9. 已知复数 $z_1=1-2i$，复数 z_2 满足 $z_2^2=3+4i$，则

A. $z_1^2=3-4i$　　B. $|z_2|=\sqrt{5}$

C. 复数 $\frac{5i}{z_1}$ 的虚部为 1　　D. 复数 z_2 在复平面内的对应点在第一或第三象限

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_1=3$，且 $S_n=3S_{n-1}+2\times 3^n\ (n\geq 2)$，则下列说法正确的有

A. $\left\{\frac{S_n}{3^n}\right\}$ 是一个等差数列　　B. $\left\{\frac{a_n}{4n}\right\}$ 是一个等比数列

C. 对 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，$3a_n>2S_n$

D. 数列 $\left\{\frac{(-3)^{n+2}a_n}{S_nS_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和为 T_n，则 $T_n=-\frac{2}{3}+\frac{(-1)^n}{2n+1}$

11. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x-1)=f(x+4)$，函数 $y=f(2^x)$ 在区间 $[0,5]$ 内有 20 个零点，则

A. $f(x+5)=f(x)$　　B. $f(x)$ 在 $[1,32]$ 内有 20 个零点

C. $f(x)$ 在 $[1,6]$ 内有 4 个零点　　D. $f(x)$ 在 $[2,16)$ 内有 7 个零点

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。请把答案填写在答题卡相应位置上。

12. 已知 $a>0$，$b>0$，且 $ab=1$，则 $\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{8}{a+b}$ 的最小值为_____.

13. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_n=\begin{cases}(3-a)n-2, & n\geq 4\\ 4a^{n-4}, & n<4\end{cases}\ (n\in\mathbf{N}^*,\ a>0)$，数列 $\{a_n\}$ 是递增数列，则实数 a 的取值范围为_____.

14. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{a^2-x^2}, & |x|\leq a\\ \frac{\sin(a\pi x)}{x}, & |x|>a\end{cases}$，其中 $a\in(0,+\infty)$，给出以下四个结论：

① 对于任意正实数 a，$f(x)$ 为偶函数；

② 记集合 $M=\{x>0\mid f(x)=0\}$，则“M 中各项可以构成一个等差数列”的充要条件是“a 是正整数”；

③ 若 $f(x)$ 有最大值，则 $a>\frac{\sqrt{3}}{2}$；

④ 存在正整数 a，使得 $f(x)$ 在区间 $(-(a+1),a+1)$ 中，恰好有 2027 个极值点.

其中正确结论的序号是_____.

四、解答题：本大题共 5 小题，共 77 分。请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤。

15. 已知 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且 $S_n=2a_n+n^2-3n-1$.

（1）求证：数列 $\{a_n-2n\}$ 为等比数列；

（2）设 $b_n=a_n\cdot\cos n\pi$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

16. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+x+a\ln(x+1)$，$a\in\mathbf{R}$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）证明：当 $a<-1$ 时，$a^2+f(x)>1$.

17. 已知函数 $f(x)=\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{6}\right)+2\sin^2\omega x-1\ (\omega>0)$.

（1）若 $\omega=1$，求 $f(x)$ 的单调递增区间；

（2）已知 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递增，再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，使函数 $f(x)$ 存在且唯一确定，求 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 上的最大值和最小值.

条件①：$f(0)+f\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$；

条件②：点 $\left(\frac{7\pi}{12},0\right)$ 在 $f(x)$ 的图象上；

条件③：$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=f\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

18. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列，其前 n 项和 S_n，$\{b_n\}$ 是等比数列，且 $a_1=b_1=3$，$a_4=b_2$，$S_3=15$.

（1）求 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（2）设 $c_n=\begin{cases}a_nb_n, & n\text{为奇数}\\ \frac{(3-4n)b_n}{a_{n-1}a_{n+1}}, & n\text{为偶数}\end{cases}$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项和 T_{2n}；

（3）若对于任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，不等式 $n(a_n+1)-\lambda(a_n-1)(n+2)-12<0$ 恒成立，求实数 λ 的取值范围.

19. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 I，$D\subseteq I$，现有如下定义：

① 若 $\forall x_1$，$x_2\in D$，且 $x_1<x_2$，有 $\frac{f(x_1)}{x_1^2}<\frac{f(x_2)}{x_2^2}$，则称 $f(x)$ 在 D 上具有“2 次幂性质”，否则称 $f(x)$ 在 D 上不具有“2 次幂性质”；

② 若 $\exists\delta\in\mathbf{R}$，$\forall x\in D$，$f(x)\le\delta$ 恒成立，则称 $f(x)$ 在 D 上有上界 δ；

③ 对于一类函数，若 $\exists M\in\mathbf{R}$，使得这一类函数中的每一个函数在 D 上的所有取值都小于等于 M，则称 M 为这一类函数的公共上界.

基于上述定义，完成如下问题：

（1）已知函数 $f(x)=2x^2+ax-3$ 在 $[1,4]$ 上不具有“2 次幂性质”，求实数 a 的取值范围；

（2）已知函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上具有“2 次幂性质”，且 $f(x_1+x_2+x_3)=100$，其中 $0<x_1<x_2<x_3$，比较 $f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)$ 与 100 的大小关系，并说明理由；

（3）将所有在 $(0,+\infty)$ 上具有“2 次幂性质”，且在 $(0,+\infty)$ 上有上界的函数 $f(x)$ 归为一类，求这类函数在 $(0,+\infty)$ 上的公共上界 M 的取值范围.